www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail

SESSION 1989 Epreuve n° 1 (Exercices)

Mathématiques

(Options T et TA)

Durée : 4 heures

Les cinq exercices proposés sont indépendants et le candidat est invité à rédiger la solution de chacun d'entre eux sur une feuille séparée.

L'utilisation d'une calculatrice personnelle est autorisée.

Tout document est strictement interdit, y compris la notice d'utilisation de la calculatrice.

EXERCICE - I -

Soit $g : \mathbb{R}^{+*} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$

$$(t , x) \longmapsto g(t , x) = \frac{x}{\sqrt{t} \cdot (1 + t.x^2)}$$

Soit $u_n : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$

$$x \longmapsto u_n(x) = g(n , x) \quad , \quad n \in \mathbb{N}^*$$

1ère Question :

Montrer que la série de fonctions de terme général u_n converge simplement sur R. On note $S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$.

2ème Question :

Montrer que la série de fonctions de terme général u_n converge uniformément vers S sur tout intervalle fermé $I = [a , b]$ ne contenant pas 0.

3ème Question :

Vérifier que pour $x > 0$ fixé, l'application partielle $t \longrightarrow g(t , x)$ est continue, positive, décroissante.

Établir la convergence et déterminer la valeur des intégrales suivantes :

$$I_1(x) = \int_1^{\infty} g(t , x)\, dt \quad \text{et} \quad I_2(x) = \int_0^{\infty} g(t , x)\, dt.$$

4ème Question :

Montrer que pour tout x positif : $I_1(x) \leqslant S(x) \leqslant I_2(x)$.

5ème Question :

En déduire la limite quand x tend vers 0 de $S(x)$.

La série de fonctions de terme général u_n converge-t-elle uniformément sur $\mathbb{R}$?

Tournez la page S.V.P.

EXERCICE - II -

Soit l'équation aux dérivées partielles (E), de fonction inconnue f.

$$(E) : \quad x.y^3.\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - y.x^3.\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} - y^3.\frac{\partial f}{\partial x} + x^3.\frac{\partial f}{\partial y} = 0$$

En utilisant le changement de variables $u = x^2 + y^2$ et $v = x^2 - y^2$, déterminer $f : \mathbb{R}^{+*} \times \mathbb{R}^{+*} \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^2$ solution générale de (E) sur $\mathbb{R}^{+*} \times \mathbb{R}^{+*}$.

$(x , y) \longmapsto f(x , y)$

EXERCICE - III -

E désigne un espace affine euclidien réel orienté de dimension 3 rapporté au repère orthonormal direct $(O , \vec{i} , \vec{j} , \vec{k})$.

S désigne l'ensemble des points M (u , v) donnés par $\overrightarrow{OM}(u , v) = \vec{F}_1(u) + v.\vec{F}_2(u)$ lorsque (u , v) parcourt $\mathbb{R}^2$,

avec $\vec{F}_1(u) = 3.u^2.\vec{i} + 4.u^3.\vec{j}$ et $\vec{F}_2(u) = u.\vec{i} + u^2.\vec{j} + \vec{k}$.

1ère Question :

Montrer que les courbes D_u définies sur S en fixant u sont des droites.

Pour chaque droite D_u indiquer un point de passage et un vecteur directeur.

2ème Question :

Montrer que pour u réel fixé, $\vec{F}_2(u)$ et $\vec{F}'_2(u)$ définissent le plan tangent à S en tous les points de D_u sauf l'un noté A (u).

Donner l'équation cartésienne de ce plan noté P_u.

3ème Question :

Γ désigne l'ensemble des points A (u) lorsque u parcourt $\mathbb{R}$. Trouver la tangente et le plan osculateur à Γ en A (u).

Tournez la page S.V.P.

EXERCICE - IV -

Les réels u et v désignent les racines de $x^2 - x + \frac{1}{10} = 0$.

L'exercice applique à une fonction $g : [\,a\,,\,b\,] \longrightarrow \mathbb{R}$ intégrable, la formule approchée suivante tirée de l'intégration des polynômes :

pour $f : [\,0\,,\,1\,] \longrightarrow \mathbb{R}$ intégrable,

on approche $\int_0^1 f(t).dt$ par la formule $Q(f) = \frac{1}{18}.[\,5.f(u) + 8.f(\frac{1}{2}) + 5.f(v)]$.

On se propose d'utiliser ce résultat pour calculer une valeur approchée de

l'intégrale $I(g) = \int_a^b g(t).dt$ où $g : [\,a\,,\,b\,] \longrightarrow \mathbb{R}$ est intégrable.

n étant un entier donné, on subdivise l'intervalle $[\,a\,,\,b\,]$ en sous-intervalles de longueur $h = \frac{b-a}{n}$ par la subdivision $a_0, a_1, \ldots\ldots, a_n$

où $a_k = a + k.h$, k élément de $\{\,0\,,\,1\,,\ldots\ldots\,,\,n\,\}$.

Alors $I(g) = \sum_{k=1}^{k=n} I_k(g)$ où $I_k(g) = \int_{a_{k-1}}^{a_k} g(t)\,dt$, $k \geqslant 1$

1ère Question :

Déterminer un changement de variables de sorte que : $I_k(g) = \int_0^1 g_k(s).\,ds$

Donner une expression de $g_k(s)$.

2ème Question :

En approchant $I_k(g)$ par $Q(g_k)$, en déduire un algorithme donnant une valeur approchée $C(g\,;\,n)$ de $I(g)$ sous la forme :

$C(g\,;\,n) = \frac{h}{18}.[\,5.S_1 + 8.S_2 + 5.S_3\,]$ où S_1, S_2, S_3 sont des sommes de valeurs de g en des points à préciser.

3ème Question : application numérique.

Par cet algorithme avec $n = 4$, donner une valeur approchée de $\int_1^2 e^{-t^2/2}.dt$

Les calculs intermédiaires de S_1, S_2 et S_3 figureront sur la copie.

T.S.V.P.

EXERCICE - V -

L'entier $p > 2$,les réels strictement positifs a et c, le réel b sont donnés.

1ère Question :

Soit f un endomorphisme de $\mathbb{R}^p$ donné par sa matrice A dans la base canonique de $\mathbb{R}^p$.

$A = [\alpha_{i,j}]_{\substack{1 \leqslant i \leqslant p \\ 1 \leqslant j \leqslant p}}$ avec

$\alpha_{i,i} = b \qquad 1 \leqslant i \leqslant p$

$\alpha_{i,i+1} = a \qquad 1 \leqslant i \leqslant p-1$

$\alpha_{i,i-1} = c \qquad 2 \leqslant i \leqslant p$

$\alpha_{i,j} = 0 \qquad$ si $|i-j| > 1$

On se propose de déterminer les éléments propres de f sans utiliser le polynôme caractéristique.

Soit $(u_1, u_2, \ldots, u_p)$ les composantes dans la base canonique d'un vecteur propre V de f. On pose $u_0 = 0$ et $u_{p+1} = 0$.

Montrer que s'il existe une suite (u_n), $n \in \mathbb{N}$, et un complexe λ vérifiant les conditions (1), (2) et (3), alors le vecteur V est vecteur propre de f associé à la valeur propre λ.

(1) $\exists j \in \{1, 2, .. p\}$ tel que $u_j \neq 0$

(2) $u_0 = u_{P+1} = 0$

(3) $\forall n$ élément de $\{1, 2, \ldots, p\}$, $a.u_{n+1} + (b - \lambda).u_n + c.u_{n-1} = 0$

2ème Question :

Il s'agit maintenant de rechercher un complexe λ et une suite de complexes (u_n), $n \in \mathbb{N}$, vérifiant (1),(2),(3'),

avec (3') $\forall n$ élément de $\mathbb{N}^*$, $a.u_{n+1} + (b - \lambda).u_n + c.u_{n-1} = 0$

Les racines de $a.r^2 + (b - \lambda).r + c = 0$ sont notées r_1 et r_2.

2.1) Vérifier que les conditions (1),(2),(3') ne peuvent pas être simultanément réalisées si $r_1 = r_2$.

2.2) Dans cette question et pour la suite de l'exercice $r_1 \neq r_2$

Montrer que la réalisation des conditions (2),(3') entraîne $\left(\frac{r_1}{r_2}\right)^{p+1} = 1$

2.3) En déduire que les racines r_1 et r_2 sont nécessairement de la forme :

$r_1 = \sqrt{\frac{c}{a}} . \exp\left(\frac{ik\pi}{p+1}\right)$ et $r_2 = \sqrt{\frac{c}{a}} . \exp\left(-\frac{ik\pi}{p+1}\right)$ k élément de $\{1, 2, \ldots\ldots, p\}$

où exp désigne la fonction exponentielle.

2.4). Indiquer alors les valeurs possibles de λ et, pour chacune de ces valeurs , donner l'expression de u_n, n élément de $\{1, 2, \ldots, p\}$.

www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail